

МОДЕЛЬ ХОЛЬТА – УИНТЕРСА: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ И КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

© 2016

М.Г. Семененко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика»

Л.А. Унтилова, старший преподаватель кафедры «Экономика и организация производства»

Калужский филиал Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана, Калуга (Россия)

Ключевые слова: тренд-сезонные временные ряды; модель Хольта – Уинтерса.

Аннотация: Одними из наиболее сложных проблем изучения различных экономических процессов являются оценка, моделирование и прогнозирование финансово-экономических показателей. Для краткосрочного прогнозирования временных рядов можно использовать модель Брауна. Если нужно учесть тренд без учета сезонности, подходит модель Хольта. Однако часто исследуемые финансовые показатели имеют трендовую компоненту и подвержены сезонным колебаниям. Такие процессы удовлетворительно моделируются временными рядами, включающими в себя как тренд, так и сезонную компоненту (тренд-сезонные временные ряды). Одним из эффективных способов моделирования тренд-сезонных временных рядов, включая прогнозирование показателей экономического процесса, является модель Хольта – Уинтерса, которая является развитием модели Хольта. К достоинствам данной модели также относится ее достаточно простая реализация в различных пакетах прикладных программ, включая электронные таблицы *Excel*. Однако при использовании этой модели возникает необходимость подбора параметров модели, что может вызвать затруднения, поскольку алгоритм такого подбора неясен. В работе проанализированы возможные алгоритмы, применяемые при решении подобных задач, однако их реализация малоприменима в рассматриваемом случае. Поэтому мы предлагаем простой, но достаточно эффективный алгоритм, включающий минимизацию функционала ошибки, который часто используется в теории искусственных нейронных сетей. Программная реализация данного алгоритма является достаточно простой и не должна вызывать затруднений. Наши вычисления показали, что различный набор параметров модели может соответствовать практически неотличимым наборам прогнозных значений модели, и, следовательно, значения этих параметров не являются специфическими для рассматриваемого экономического показателя.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании экономических проблем часто приходится сталкиваться с необходимостью прогнозирования поведения исследуемых динамических показателей. Часто эти показатели представлены временными рядами.

Временные ряды представляют собой совокупность наблюдений за значениями некоторого показателя, упорядоченную по возрастанию временных значений [1–5]. Значения временного ряда также называют уровнями. Расстояния между уровнями временного ряда должны быть одинаковыми.

Особый интерес представляют тренд-сезонные временные ряды, которые включают как трендовую, так и сезонную компоненту. Такие ряды могут, например, появляться при моделировании потребления энергоресурсов [6]. Для краткосрочного прогнозирования тренд-сезонных временных рядов можно использовать адаптивные модели с сезонной компонентой. Адаптивные модели могут на текущем шаге учитывать информацию, полученную на предыдущих временных шагах, и отражать эволюцию динамических характеристик исследуемого объекта [7–9].

К популярным адаптивным методам краткосрочного прогнозирования относятся модели Брауна [10; 11], Хольта [12] и, для тренд-сезонных временных рядов, модели Хольта – Уинтерса [12], которые легко реализуются численно, например в электронных таблицах *Excel*. Однако при проведении вычислений остается проблема, связанная с подбором адаптивных коэффициентов модели.

В работе предлагается простой и эффективный метод подбора коэффициентов в модели Хольта – Уин-

терса. Достоинством метода является простота его численной реализации.

Наши вычисления показали, что различные наборы коэффициентов могут дать практически совпадающие решения задачи, и, следовательно, значения адаптивных параметров модели не являются специфическими для изучаемого экономического процесса.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Мультипликативная модель Хольта – Уинтерса с линейным ростом имеет вид [2]:

$$Y_p(t+k) = [a(t) + k b(t)] F(t+k-L), \quad (1)$$

где k – период упреждения;

$Y(t)$ – расчетное значение экономического показателя для t -го периода;

$a(t)$, $b(t)$ и $F(t)$ – коэффициенты модели;

L – период сезонности (для квартальных данных $L=4$, для месячных данных $L=12$).

$F(t+k-L)$ является значением коэффициента сезонности того периода, для которого рассчитывается экономический показатель. Очевидно, что для малых значений t аргумент функции F будет отрицательным.

Уточнение коэффициентов модели проводится по формулам:

$$a(t) = \alpha_1 Y(t)/F(t-L) + (1 - \alpha_1) [a(t-1) + b(t-1)], \quad (2)$$

$$b(t) = \alpha_3 [a(t) - a(t-1)] + (1 - \alpha_3) b(t-1), \quad (3)$$

$$F(t) = \alpha_2 Y(t)/a(t) + (1 - \alpha_2) F(t-L). \quad (4)$$

Для оценки начальных значений $a(0)$ и $b(0)$ применяются методы эконометрики, для чего строят линейную модель регрессии для первых членов ряда [13; 14].

Как отмечалось выше, первые несколько значений t будут соответствовать отрицательному аргументу функции F . В этом случае значения коэффициентов сезонности вычисляются как среднее арифметическое за эти периоды. Например, в рассматриваемом далее примере значение $F(-3)$ вычисляется как

$$Y(1)/Y_{lin}(1) + Y(5)/Y_{lin}(5) \tag{5}$$

где $Y_{lin}(t)$ – значение экономического показателя, вычисленное по линейной модели вида

$$Y(t) = a(0) + b(0) \cdot t.$$

Значения коэффициентов сезонности для положительных значений аргумента вычисляются по формуле (4).

Для значений $t \geq 1$ значения Y_p вычисляются по формуле (1). Затем по формулам (2)–(4) находят текущие значения всех параметров модели.

Прогнозируемые значения Y_p рассчитываются по формуле (1) при фиксированном t (в рассматриваемом примере это значение равно 16) и различных значениях k (в рассматриваемом примере значение k меняется от 1 до 4).

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИ. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Поскольку результаты вычислений и исходные данные удобно представлять в виде таблиц, для компьютерной реализации описанного выше алгоритма удобно использовать электронные таблицы *Excel* (аналогично тому, как это сделано для различных экономических моделей в [15–17]).

Рассмотрим компьютерную реализацию модели в *Excel* при заданных значениях α ($\alpha_1=0,3$, $\alpha_2=0,6$, $\alpha_3=0,3$). В качестве примера проанализируем моделирование и прогнозирование динамики цены акции $Y(t)$ [2].

В рассматриваемом примере месячных данных за четыре года для построения линейной модели можно использовать первые восемь членов ряда. Для вычисления значения $a(0)$ целесообразно использовать функцию НАКЛОН, а для вычисления значения $b(0)$ – функцию ОТРЕЗОК (группа «Статистические»). Начиная с $t=0$, значения $Y_p(t)$ рассчитываются по формулам (2)–(4).

Исходные данные и результаты моделирования, полученные нами в электронных таблицах *Excel*, показаны на рис. 1. Там же приведены соответствующие графики.

Очевидно, что наиболее сложным и нетривиальным пунктом данной модели является подбор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Будем далее обозначать это множество коэффициентов символом α .

Для вычисления значений α применение традиционных вычислительных методов (например, метода градиентного спуска или различных модификаций симплекс-метода [18–20]) является сложным и неудобным, поскольку в уравнение (1) предыдущее значение показателя входит неявно.

Мы предлагаем следующий алгоритм вычислений, позволяющий одновременно определить подходящие значения α . В качестве параметра, определяющего качество модели при фиксированном наборе значений α , выберем функционал

$$Err = \sum (\hat{y} - y)^2,$$

где \hat{y} и y – модельные и табличные значения результирующего фактора соответственно.



Рис. 1. Результаты моделирования по модели Хольта – Уинтерса

По аналогии с терминологией искусственных нейронных сетей будем называть данный функционал функционалом ошибки. Значение функционала ошибки для набора значений $\alpha_1=0,3$, $\alpha_2=0,6$ и $\alpha_3=0,3$, предлагаемого в [2], равно 950,75.

Значения α_1 , α_2 и α_3 принадлежат интервалу $[0; 1]$. Разобьем данный интервал на N отрезков равной величины $1/N$. В результате получим разбиение единичного трехмерного куба в пространстве $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Вычислим значение функционала Err в каждой точке разбиения и зафиксируем множество α , соответствующее минимуму значений функционала. Для набора данных, соответствующих рис. 1, получаем значения: $\alpha_1=0,4$, $\alpha_2=0,5$ и $\alpha_3=0,2$, что соответствует значению функционала ошибки $Err = 940,17$.

Наши вычисления показали, что два набора значений параметров α (0,4; 0,5; 0,2) и (0,3; 0,6; 0,3) соответствуют мало отличающимся значениям функционала ошибки, а результаты моделирования практически не отличаются визуально. Можно сделать вывод, что значения этих параметров не являются достаточно специфическими и не могут существенно отражать природу изучаемых динамических процессов в экономике.

Достоинство описанного выше алгоритма заключается в том, что его программная реализация не представляет существенных трудностей в любых системах программирования и пакетах прикладных программ и дает достаточно хорошие результаты.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Предложен алгоритм вычисления параметров в модели Хольта – Уинтерса, не вызывающий существенных трудностей при программной реализации и дающий достаточно хорошие результаты.

2. Результаты вычислений показывают, что набор значений параметров в модели Хольта – Уинтерса может определяться неоднозначно, т. е. значения этих параметров не являются специфическими для исследуемого экономического процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики. СПб.: Питер, 2010. 496 с.
2. Финансовая математика. Математическое моделирование финансовых операций. М.: Вузский учебник, 2010. 312 с.
3. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование. М.: Финансы и статистика, 2010. 320 с.
4. Азаренкова Г.М., Головкин Е.Г., Пономаренко В.А. Повышение результативности деятельности предприятия на основе анализа основных финансовых показателей // Эффективное антикризисное управление. 2014. № 1. С. 54–63.
5. Адамадиев К.Р., Касимова Т.М. Методы прогнозирования развития сельского хозяйства // Фундаментальные исследования. 2014. № 5-1. С. 122–126.
6. Кузнецова И.Ю. Прогнозирование потребления энергоресурсов на основе модели Хольта-Уинтерса // Международный научно-исследовательский журнал. 2014. № 8-1. С. 25–27.

7. Давнис В.В., Коротких В.В. Эконометрические обоснования инвестиционных решений // Экономическое прогнозирование: модели и методы: сборник материалов X Международной научно-практической конференции. Воронеж: Научная книга, 2014. С. 111–118.
8. Зеленина Л.И., Олар Я.В. Адаптивные модели прогнозирования // Современные научные исследования и инновации. 2015. № 3-2. С. 66–69.
9. Трофимова Е.В., Зеленина Л.И. Моделирование деятельности конкурирующих компаний на основе адаптивных моделей прогнозирования // Современные научные исследования и инновации. 2015. № 7-3. С. 106–109.
10. Холодова Г.М., Лещёва Л.Н. Эффективность использования модели Брауна в моделях регрессионного анализа // Наука и современность. 2011. № 13-3. С. 167–172.
11. Трофимов Д.Ю. Модель с коррекцией прогноза на основе модели Брауна // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования. 2015. Т. 2. № 1. С. 253–257.
12. Фомина Е.С., Трофимова В.Ш. Моделирование доходности арендодателя торговых площадей в крупном торговом центре // Приложение математики в экономических и технических исследованиях. 2015. № 1. С. 101–105.
13. Берндт Э.Р. Практика эконометрики: классика и современность. М.: Юнити-Дана, 2005. 863 с.
14. Елисеева И.И. Эконометрика. М.: Финансы и кредит, 2003. 344 с.
15. Семененко М.Г., Черняев С.И. Функции пользователя в EXCEL 2013: разработка приложений нечеткой логики // Успехи современного естествознания. 2014. № 3. С. 114–117.
16. Семененко М.Г., Кулакова Н.Н. Прогнозирование финансовой устойчивости предприятия на основе формализма нечеткой логики // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 5-2. С. 191–192.
17. Кулакова Н.Н., Семененко М.Г., Черняев С.И., Утилова Л.А. Анализ финансовой устойчивости предприятия // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. 2014. № 1. С. 127–129.
18. Тархов Д.А. Нейронные сети как средство математического моделирования // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. М.: Радиотехника, 2006. С. 1–49.
19. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Численные методы оптимизации. М.: Юрайт, 2016. 367 с.
20. Подгорнова Н.А., Терехин В.И. Сравнительный анализ классических и нейросетевых методов прогнозирования остатков денежных средств предприятия // Перспективы науки. 2010. № 8. С. 44–50.

REFERENCES

1. Krass M.S., Chuprynov B.P. *Matematicheskie metody i modeli dlya magistrantov ekonomiki* [Mathematical methods and models for graduate students in economics]. Sankt Petersburg, Piter Publ., 2010. 496 p.
2. *Finansovaya matematika. Matematicheskoe modelirovanie finansovykh operatsiy* [Financial mathematics.

- Mathematical modeling of financial operations]. Moscow, Vuzovskiy uchebnik Publ., 2010. 312 p.
3. Afanasev V.N., Yuzbashev M.M. *Analiz vremennykh ryadov i prognozirovanie* [Time series analysis and forecasting]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2010. 320 p.
 4. Azarenkova G.M., Golovko E.G., Ponomarenko V.A. Improving the performance of the company based on the analysis of key financial indicators. *Effektivnoe antirizisnoe upravlenie*, 2014, no. 1, pp. 54–63.
 5. Adamadziev K.R., Kasimova T.M. Methods of forecasting of development of agriculture. *Fundamentalnye issledovaniya*, 2014, no. 5-1, pp. 122–126.
 6. Kuznetsova I.Yu. Prediction of energy consumption based on Holt-Winters model. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal*, 2014, no. 8-1, pp. 25–27.
 7. Davnis V.V., Korotkikh V.V. Econometric grounds for investment solutions. *Ekonomicheskoe prognozirovanie: modeli i metody: sbornik materialov X Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*. Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2014, pp. 111–118.
 8. Zelenina L.I., Olar Ya.V. Adaptive forecasting models. *Sovremennye nauchnye issledovaniya i innovatsii*, 2015, no. 3-2, pp. 66–69.
 9. Trofimova E.V., Zelenina L.I. Modeling the activities of rival campaigns based on adaptive prediction models. *Sovremennye nauchnye issledovaniya i innovatsii*, 2015, no. 7-3, pp. 106–109.
 10. Kholodova G.M., Leshcheva L.N. The efficiency of application of Brown model in regressive analysis models. *Nauka i sovremennost'*, 2011, no. 13-3, pp. 167–172.
 11. Trofimov D.Yu. The model with prognosis correction on the basis of Brown model. *Aktualnye problemy sovremennoy nauki, tekhniki i obrazovaniya*, 2015, vol. 2, no. 1, pp. 253–257.
 12. Fomina E.S., Trofimova V.Sh. Profitability modeling for the rental areas in a major shopping center. *Prilozhenie matematiki v ekonomicheskikh i tekhnicheskikh issledovaniyakh*, 2015, no. 1, pp. 101–105.
 13. Berndt E.R. *Praktika ekonometriki: klassika i sovremennost'* [The practice of econometrics: classic and contemporary]. Moscow, Yuniti-Dana Publ., 2005. 863 p.
 14. Eliseeva I.I. *Ekonometrika* [Econometrics]. Moscow, Finansy i kredit Publ., 2003. 344 p.
 15. Semenenko M.G., Chernyaev S.I. User functions in EXCEL 2013: programming fuzzy logic applications. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya*, 2014, no. 3, pp. 114–117.
 16. Semenenko M.G., Kulakova N.N. The forecasting of financial stability of an enterprise on the basis of fuzzy logic formal description. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamentalnykh issledovaniy*, 2014, no. 5-2, pp. 191–192.
 17. Kulakova N.N., Semenenko M.G., Chernyaev S.I., Untilova L.A. Analysis of financial stability of the enterprise. *Vektor nauki Tolyatinskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2014, no. 1, pp. 127–129.
 18. Tarkhov D.A. Neural networks as means of mathematical modeling. *Neyrokomp'yutery: razrabotka, primeneniye*. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2006, pp. 1–49.
 19. Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V. *Chislennyye metody optimizatsii* [Numerical methods of optimization methods]. Moscow, Yurayt Publ., 2016. 367 p.
 20. Podgornova N.A., Terekhin V.I. Comparative analysis of classical and neural network methods of forecasting of company cash balance. *Perspektivy nauki*, 2010, no. 8, pp. 44–50.

HOLT–WINTERS MODEL: MATHEMATICAL ASPECTS AND COMPUTER IMPLEMENTATION

© 2016

M.G. Semenenko, PhD (Physics and Mathematics), assistant professor of Chair “Higher mathematics”
L.A. Untilova, senior lecturer of Chair “Economics and organization of production”
Kaluga branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga (Russia)

Keywords: trend-seasonal temporal series; Holt–Winters model.

Abstract: Evaluation, modeling and forecasting of financial and economic indicators are the most complex problems while studying various economic phenomena. For the short-term forecasting of temporal series, the Brown model can be used. The Holt model can be applied if it is necessary to consider a trend without seasonality. However, the financial indicators studied often have the trend component and are subject to the seasonal fluctuations. Such processes can be adequately modeled by the temporal series including both the trend and the seasonal component (trend-seasonal temporal series). One of the most effective methods of modeling of trend-seasonal temporal series including the forecasting of economic phenomena indicators is the Holt–Winters model that is the evolution of Holt model. Its rather simple implementation in various packages of application software including the Excel electronic spreadsheets is one of the advantages of this model. However, when using this model, it is necessary to select the model’s parameters that can cause difficulties as the algorithm of this selection is not clear. In this paper, the authors analyzed possible algorithms used for the solution of similar tasks; however, their implementation is hardly suitable in the case under discussion. That is why the authors offer simple but rather effective algorithm including the minimization of the error functionality that is often used in the theory of artificial neural networks. The program implementation of this algorithm is rather simple and should not cause difficulties. The authors’ calculations showed that the particular set of model parameters can correspond to almost indistinguishable sets of expected model values and, therefore, the values of these parameters are nonspecific to the economic indicator under consideration.